ΟΡΙΣΜΟΙ - ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1) Τυχαίο πείραμα (τ.π.): Κάθε φαινόμενο-διαδικασία-κατάσταση που αποτελείται από ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων αλλά δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα ποιο από αυτά θα συμβεί

2) Δειγματικός χώρος (δ.χ): Το σύνολο S των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος

Παραδείγματα

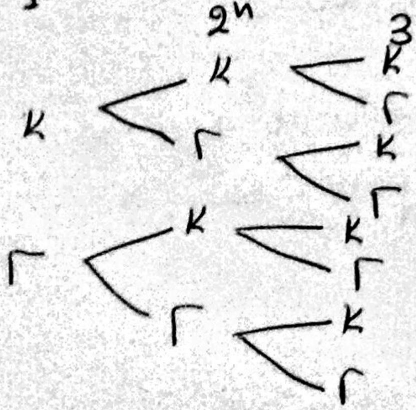
α) Ρίψη νομίσματος μια φορά $S = \{Κ, Γ\}$

β) Ρίψη ζαριού μια φορά $S = \{$⚀, ⚁, ..., ⚅$\} = \{1, 2, \ldots, 6\}$

γ) Ρίψη νομίσματος 3 φορές ή Ρίψη 3 νομισμάτων 1 φορά

$S = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ, ΓΓΓ\}$

$\underset{\_}{\overset{2}{\downarrow}}\ \underset{\_}{\overset{2}{\downarrow}}\ \underset{\_}{\overset{2}{\downarrow}}$ πολλαπλ/κος νόμος $2^3 = 8$ δυνατά αποτελέσματα



δ) Ρίψη 2 ζαριών μια φορά ή ρίψη 1 ζαριού 2 φορές

$S = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 = 1, \ldots, 6\}$

$\overset{\uparrow}{6}\ \overset{\uparrow}{6} = 6^2 = 36$ δυνατά αποτελέσματα ε) Ρίψη ν-ζαριών μια φορά ή ρίψη ενός ζαριού ν-φορές

$S = \{ (x_1, \ldots, x_n) : x_i = 1, \ldots, 6,\ i = 1, \ldots, n$

$6 \times \ldots \times 6 = 6^n$ δυνατά αποτελέσματα

στ) Νόμισμα ρίχνεται μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά Κ
Μετά σταματάμε

$S = \{ K, \Gamma K, \Gamma\Gamma K, \ldots, \Gamma\Gamma \cdots \Gamma K, \ldots \}$

Πόσες είναι οι ρίψεις : $\{1, 2, \ldots n, \ldots\}$

ζ) Πλήθος αφίξεων σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης.
π.χ πλήθος πελατών σε τράπεζα για εξυπηρέτηση

$S = \{ 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \}$

η) Χρόνος ζωής ανθρώπου ή συσκευής

$S = [0, a) \quad a \in \mathbb{N}$

3) Ενδεχόμενο : Κάθε υποσύνολο του δ.χ. **S**

4) Απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο : Κάθε ενδεχόμενο που αποτελείται από ένα στοιχείο του S

5) Θα λέμε ότι ένα ενδεχόμενο Α έχει συμβεί ή έχει πραγματοποιηθεί αν το αποτέλεσμα του Τ.Π είναι στοιχείο του Α

π.χ Ρίψη ζαριού μια φορά

$S = \{1, 2, \ldots, 6\}$

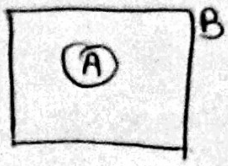
$A = \{\text{αποτέλεσμα άρτιος}\} = \{2, 4, 6\}$

Αν έρθει 2 το Α έχει πραγματοποιηθεί

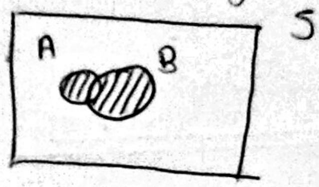
Αν έρθει 5 το Α δεν έχει πραγματοποιηθεί

Πράξεις μεταξύ ενδεχομένων

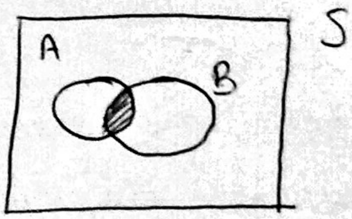
① Το A συνεπάγεται το B ($A \subseteq B$) αν συνολοθεωρητικά το $A \subseteq B$ ενώ πιθανοθεωρητικά η πραγματοποίηση του A έχει ως συνέπεια την πραγματοποίηση του B



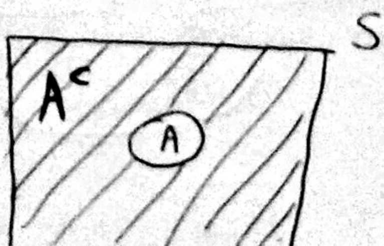
② Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται αν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B



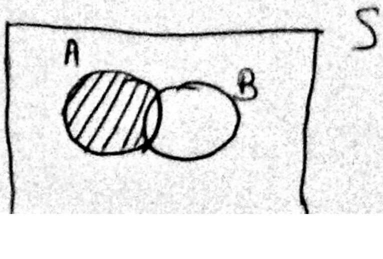
③ Το ενδεχόμενο $A \cap B$ πραγματοποιείται αν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A και B



④ Το συμπλήρωμα του ενδεχομένου A συμβολίζεται με $\bar{A}$ ή A^c και είναι η πραγματοποίηση του A^c η οποία συνίσταται από τη μη πραγματοποίηση του A



⑤ Η διαφορά A-B είναι το ενδεχόμενο που αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B. Η διαφορά A-B πραγματοποιείται αν πραγματοποιηθεί το A και δεν πραγματοποιηθεί το B

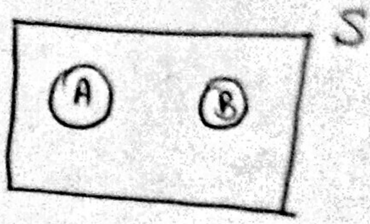


ΟΡΙΣΜΟΙ

1) Αδύνατο ενδεχόμενο: Εκείνο που δεν πραγματοποιείται ποτέ. Ταυτόσημο $\emptyset$

2) Βέβαιο ενδεχόμενο: Εκείνο το οποίο πάντα πραγματοποιείται. (S)

3) Δύο ενδεχόμενα A, B θα λέγονται ασυμβίβαστα αν $A \cap B = \emptyset$. Αν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα.



Κλασσικός Ορισμός Πιθανότητας

(Laplace ~1812)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω S πεπερασμένο σύνολο με $S \neq \emptyset$. Έστω $A \subseteq S$ ενδεχόμενο. Η πιθανότητα του A συμβολίζεται με $P(A)$ και ορίζεται ως εξής:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος αποτελεσμάτων που ευνοούν την πραγματοποίηση του } A}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} =$$

$$= \frac{\text{πλήθος στοιχείων του } A}{\text{πλήθος στοιχείων του } S} = \frac{\|A\|}{\|S\|}$$

συμβολισμός

π.χ. • Πιθανότητα ένα στα έξι $= \frac{1}{6}$

• Πιθανότητα άρτιας $\{2, 4, 6\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Αδυναμίες Κλασσικού Ορισμού

1) S = πεπερασμένο , $S \neq \emptyset$

πρόβλημα / βλέπε π.χ 6,7,8)

2) Έστω S = πεπερ = $\{s_1, \dots, s_n\}$

$$P(\{s_i\}) = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Ο κλασσικός ορισμός θα πρέπει να εφαρμόζεται σε περιπτώσεις που τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Ιδιότητες Κλασσικού Ορισμού

- $0 \leq P(A) \leq 1$

$$P(A) = \frac{\|A\|^{\geq 0}}{\|S\|_{>0}} \geq 0 \quad A \subseteq S \Rightarrow \|A\| \leq \|S\| \Rightarrow \frac{\|A\|}{\|S\|} \leq 1$$

- $P(S) = 1$

- Αν A, B ασυμβίβαστα $A \cap B = \emptyset$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Απόδειξη

$$P(A \cup B) = \frac{\|A \cup B\|}{\|S\|} = \frac{\|A\| + \|B\|}{\|S\|} = \frac{\|A\|}{\|S\|} + \frac{\|B\|}{\|S\|} = P(A) + P(B)$$

- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Απόδειξη

$$P(A^c) = \frac{\|A^c\|}{\|S\|} = \frac{\|S - A\|}{\|S\|} = \frac{\|S\| - \|A\|}{\|S\|} = \frac{\|S\|}{\|S\|} - \frac{\|A\|}{\|S\|} = 1 - P(A)$$

Παραδείγματα

1) Ζάρι ρίχνεται 2 φορές. Να υπολογίσουν οι πιθανότητες

α. $A = \{$ το άθροισμα των ρίψεων ίσο με $7\}$

β. $B = \{$ η απόλυτη διαφορά ρίψεων ίση με $4\}$

Λύση

$S = \{(\underset{6}{x}, \underset{\times 6}{y}) : x, y = 1, \dots, 6\}$ $\quad \|S\| = 36$

α. $A = \{(x,y) : x+y = 7 \ , x,y = 1, \dots, 6\}$

$A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

β. $B = \{(x,y) : |x-y| = 4 \ , x,y = 1, \dots, 6\}$

$B = \{(5,1), (1,5), (6,2), (2,6)\}$

$$P(B) = \frac{\|B\|}{\|S\|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2) Κάλπη περιέχει n διακεκριμένες όμοιες μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το n: ①, ②, ..., ⓝ. Επιλέγονται k μπάλες η μία μετά την άλλη με επανατοποθέτηση. Ποια η πιθανότητα οι μπάλες που θα επιλεγούν να είναι διαφορετικές αν μας ενδιαφέρει και η σειρά επιλογής τους $(1 \le k \le n)$

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο οι μπάλες να είναι διαφορετικές

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{(n)_k}{n^k}$$

διότι $S \to k$-άδες επαναλ.

1η 2η . . . . κ-οστή

↑ ↑ ↑

$$\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{n^k}$$

και $A \to k$-άδες επαναλ.

1η 2η . . . . κ-οστή

↑ ↑ ↑

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$$